2301116
Calculus for Business II

บทที่ 6
สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น และสมการเชิงผลต่าง

Dr.Paisan Nakmahachalasint
Paisan.N@chula.ac.th

สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่า

Example

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 1 ดีกรี 1

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad y' = 2xy$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = xy^2 \qquad \left(y''\right)^3 + \left(y'\right)^4 = xy^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ดีกรี 3

อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการ

ดีกรี (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดเมื่อทำให้อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ในสมการมีกำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 2xy$

ถ้าแทน $y = e^{x^2}$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = e^{x^2}\frac{dx^2}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xy$

กล่าวว่า $y = e^{x^2}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 2xy$

"ผลเฉลยเฉพาะ"

$y = 2e^{x^2}$, $y = -3e^{x^2}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของ $\frac{dy}{dx} = 2xy$

สามารถเขียนผลเฉลยในรูป $y = ce^{x^2}$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว "ผลเฉลยทั่วไป"

สมการแยกตัวแปรได้

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 2xy$

$\frac{dy}{y} = 2x\,dx$ แยก x และ y

$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$ อินทิเกรตทั้งสองข้าง

$\ln y = x^2 + c_1$

$y = e^{x^2 + c_1} = \left(e^{c_1}\right)e^{x^2}$

$y = ce^{x^2}$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว "ผลเฉลยทั่วไป"

ผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยเฉพาะ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} = 2xy$ คือ $y = ce^{x^2}$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ถ้ากำหนดให้ว่า $y = e$ เมื่อ $x = 1$ ก็จะได้

$$e = ce^{(1)^2} \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ $y = e^{x^2}$

จงหาผลเฉลยเฉพาะถ้ากำหนดให้ $y = e^2$ เมื่อ $x = 3$?

Exercise

จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $x^2y\,dx - \ln y\,dy = 0$ ถ้า $y(2) = 1$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + x}{x^2y + 2y}$ ถ้า $y(1)=2$
3. $(y + x^2y)dy = 2x\,dx$ ถ้า $y(0)=4$
4. $yy'\sqrt{x^2+1} = x$ ถ้า $y(1)=1$

สมการเชิงเส้น

สมการอนุพันธ์จะเป็นสมการเชิงเส้นเมื่อสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)}$$

เมื่อ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่าง

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3 \qquad P(x) = -\frac{1}{x},\ Q(x) = x^3$$

$$x\frac{dy}{dx} + (2+x)y = e^{-x} \qquad P(x) = ?,\ Q(x) = ?$$

ผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

ถ้ามีสมการเชิงเส้น $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

นิยามตัวประกอบอินทิเกรตสำหรับสมการเชิงเส้นข้างต้นเป็น

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

จะได้ผลเฉลยของสมการเชิงเส้นเป็น

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu\, Q(x)\,dx + c\right)$$

Example

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \qquad P(x) = 1,\ Q(x) = e^x$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + c\right) = e^{-x}\left(\int e^{2x}dx + c\right)$$

$$= e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{2} + c\right) = \frac{e^x}{2} + ce^{-x}$$

Example

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3 \qquad P(x) = -\frac{1}{x},\ Q(x) = x^3$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = -\frac{1}{x}$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + c\right) = -x\left(\int -x^2dx + c\right)$$

$$= -x\left(-\frac{x^3}{3} + c\right) = \frac{x^4}{3} - cx$$

Example

$$x\frac{dy}{dx} + (2+x)y = e^{-x} \qquad P(x) = 1 + \frac{2}{x},\ Q(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx} = e^{x+2\ln x} = x^2e^x$$

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + c\right) = \frac{1}{x^2e^x}\left(\int xdx + c\right)$$

$$= \frac{1}{x^2e^x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = e^{-x}\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{x^2}\right)$$

Exercise

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^2$
2. $2\dfrac{dy}{dx} - y = e^{x/2}$
3. $(1+x^2)dy = (x+xy)dx$
4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x\ln x} = \dfrac{1}{x}$
5. $xdy + ydx = ydy$
6. $(x-2y)dy + ydx = 0$

สมการแบร์นูลี (Bernoulli Equations)

สมการเชิงอนุพันธ์ที่เขียนได้ในรูป

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n}$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัวซึ่ง $n \neq 0$ และ $n \neq 1$ เรียกว่าสมการแบร์นูลี

ตัวอย่าง

$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2y^2$ สมการแบร์นูลีที่มี $n = 2$

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3}$ สมการแบร์นูลีที่มี $n =$ -3

สมการแบร์นูลีสามารถจัดรูปเป็น

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

เมื่อแทนค่า $\boxed{z = y^{1-n}}$ จะได้

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)}$$

ซึ่งสามารถแก้ได้ด้วยวิธีของสมการเชิงเส้น

Example

$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2y^2$ เป็นสมการแบร์นูลีที่มี $n = 2$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)y^{-1} = 2$$

$$z = y^{1-n} = y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)z = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = -2$$

$$\mu = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}$$

$$z(x) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)dx + c\right) = x^2\left(\int -\frac{2}{x^2}dx + c\right)$$

$$= x^2\left(\frac{2}{x} + c\right) = 2x + cx^2$$

จาก $z = y^{-1}$ จะได้ $y = \frac{1}{z}$ หรือ

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2x + cx^2}}$$

Exercise

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$
2. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{2x}=\frac{x}{y^3}$
3. $(y+xy^2)dx-dy=0$
4. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์

ให้ $M(t)$ เป็นราคาเฉลี่ยของบ้านเมื่อเวลาผ่านไป t ปี นับจากปี 2540 ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

$$M'(t)=0.04M(t)$$

และ $M(0)=1.2$ ล้านบาท จงหาราคาเฉลี่ยของบ้านในปี 2550

จาก $M'(t)=0.04M(t)$ จะได้ $M(t)=c\cdot e^{0.04t}$

จาก $M(0)=1.2$ จะได้ $c=1.2$

ดังนั้น $M(t)=1.2\cdot e^{0.04t}$

ในปี 2550 นั่นคือ $t=10$ จะได้ $M(10)=1.2\cdot e^{0.4}\approx 1.79$

ดังนั้น ราคาเฉลี่ยของบ้านในปี 2550 คือ 1.79 ล้านบาท

Example

ความสัมพันธ์ระหว่างราคาต่อหน่วย (p) และยอดขายในหนึ่งสัปดาห์(y) ของสินค้าหนึ่งมีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dp}=-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{p+3}\right)$$

จงหาจำนวนสินค้าที่ขายได้ในหนึ่งสัปดาห์ เมื่อตั้งราคาหน่วยละ 13 บาท โดยที่เมื่อสินค้าราคาหน่วยละ 1 บาทนั้น บริษัทมียอดขายต่อสัปดาห์คือ 5000 หน่วย

Example

ปริมาณธาตุไอโอดีน 131 ในน้ำนมวัวของฟาร์มแห่งหนึ่งมีปริมาณมากเกินไป เจ้าของฟาร์มจึงต้องเก็บน้ำนมวัวไว้ก่อนเพื่อให้ธาตุไอโอดีน 131 สลายให้เหลือเพียง 1/10 เท่าของประมาณในปัจจุบัน เจ้าของฟาร์มทราบว่าอัตราการสลายตัวของธาตุไอโอดีน 131 มีสมการเป็น

$$\frac{d}{dt}P(t)=kP(t)$$

เมื่อ $P(t)$ คือปริมาณไอโอดีน 131 ที่เหลืออยู่ ณ เวลา t วันนับจากปัจจุบัน และครึ่งชีวิตของธาตุไอโอดีน 131 คือ 8 วัน จงหาว่าเจ้าของฟาร์มต้องเก็บน้ำนมวัวไว้นานเท่าไรถึงสามารถนำน้ำนมวัวออกมาจำหน่ายได้

Example

กำหนดให้ $p(t)$ คือ ราคาต่อหน่วยของสินค้า ณ เวลา t

$d(t) = 30 - 2p(t)$ คือ ฟังก์ชันอุปสงค์ ณ เวลา t

$s(t) = 20 + 3p(t)$ คือ ฟังก์ชันอุปทาน ณ เวลา t

โดยที่ฟังก์ชัน $p(t)$, $d(t)$ และ $s(t)$ สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dp}{dt} = 3\left(d(t) - s(t)\right)$$

จงหาว่าในระยะยาวราคาสินค้าต่อหน่วยควรมีราคาหน่วยละเท่าไร

สมการเชิงผลต่าง

พิจารณาปัญหาต่อไปนี้

นำเงินฝากธนาคารเดือนละ 100 บาท ทุกเดือน โดยได้ดอกเบี้ย 1% ต่อเดือน เมื่อผ่านไป n เดือนจะมีเงินในธนาคารเท่าไร

ให้ y_n เป็นเงินในธนาคารเมื่อผ่านไป n เดือน จะเห็นว่า

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 100 \\ y_2 &= 1.01 \times y_1 + 100 = 201 \\ y_3 &= 1.01 \times y_2 + 100 = 303.01 \\ &\vdots \\ y_n &= ? \end{aligned}\right\}$$

สมการเชิงผลต่าง

$\boxed{y_{n+1} = 1.01 y_n + 100}$

เงื่อนไขเริ่มต้น $y_1 = 100$

สมการเชิงผลต่างเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$\boxed{y_{n+1} = a y_n + g(n)}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ขั้นที่ 1: หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y_{n+1} = a y_n$ จะได้

$$\boxed{y_n^H = C \cdot a^n}$$

ขั้นที่ 2: หาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y_{n+1} = a y_n + g(n)$

โดยสมมุติผลเฉลยเฉพาะเป็น y_n^P ตามรูปแบบของ $g(n)$

ขั้นที่ 3: ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y_{n+1} = a y_n + g(n)$ คือ

$$\boxed{y_n = y_n^H + y_n^P}$$

และแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น(ถ้ามี) เพื่อหาค่าคงตัว C

Example

จงหาผลเฉลยของสมการ $y_{n+1} = 1.01 y_n + 100$

เมื่อกำหนด $y_1 = 100$

ขั้นที่ 1: หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y_{n+1} = 1.01 y_n$ จะได้

$$\boxed{y_n^H = C \cdot 1.01^n}$$

ขั้นที่ 2: หาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y_{n+1} = 1.01 y_n + 100$

โดยสมมุติผลเฉลยเฉพาะเป็น $y_n^P = c_0$

เมื่อแทนในสมการเชิงผลต่าง จะได้

$$c_0 = 1.01 c_0 + 100 \quad \Rightarrow \quad c_0 = -10000$$

ดังนั้น $\boxed{y_n^P = -10000}$

Example (Cont'd)

ขั้นที่ 3: ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y_{n+1} = 1.01 y_n + 100$ คือ

$$\boxed{y_n = y_n^H + y_n^P = C \cdot 1.01^n - 10000}$$

เมื่อแทนเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1 = 100$ จะได้

$$C \cdot 1.01^1 - 10000 = 100 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{10100}{1.01} = 10000$$

ดังนั้น

$$\boxed{y_n = 10000\left(1.01^n - 1\right)}$$

การกำหนดรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ

1. เมื่อ $g(n)$ เป็นพหุนามและ $a \neq 1$
   ให้สมมุติ y_n^P เป็นพหุนามดีกรีเดียวกับ $g(n)$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= 2y_n + 5n^2 \\ y_n^P &= c_0 + c_1 n + c_2 n^2 \end{aligned}}$$

2. เมื่อ $g(n) = b^n$
   2.1 ถ้า $a \neq b$ ให้สมมุติ $y_n^P = k \cdot b^n$
   2.2 ถ้า $a = b$ ให้สมมุติ $y_n^P = k \cdot nb^n$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= 3y_n + 7 \cdot 2^n \\ y_n^P &= k \cdot 2^n \end{aligned}}$$

3. เมื่อ $g(n)$ เป็นผลคูณของพหุนามกับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= 3y_n + (n+n^2)2^n \\ y_n^P &= (c_0 + c_1 n + c_2 n^2) \cdot 2^n \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= 3y_n + (n+n^2)3^n \\ y_n^P &= n(c_0 + c_1 n + c_2 n^2) \cdot 2^n \end{aligned}}$$

4. เมื่อ $g(n) = g_1(n) + g_2(n)$
   สมมุติ $y_n^P = y_n^{P_1} + y_n^{P_2}$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= 3y_n + 2^n + 3^n \\ y_n^P &= k_1 \cdot 2^n + k_2 \cdot n \cdot 3^n \end{aligned}}$$

Example

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y_{n+1} = 2y_n + n^2$

ขั้นที่ 1: หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y_{n+1} = 2y_n$ ได้ $\boxed{y_n^H = C \cdot 2^n}$

ขั้นที่ 2: หาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y_{n+1} = 2y_n + n^2$

โดยสมมุติผลเฉลยเฉพาะเป็น $y_n^P = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$

เมื่อแทนในสมการเชิงผลต่าง จะได้

$$c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2 = 2\left[c_0 + c_1 n + c_2 n^2\right] + n^2$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{cases} n^2: & c_2 = 2c_2 + 1 \\ n: & c_1 + 2c_2 = 2c_1 \\ 1: & c_0 + c_1 + c_2 = 2c_0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_n^P = -3 - 2n - n^2}$$

$$\boxed{y_n = C \cdot 2^n - 3 - 2n - n^2}$$

การประยุกต์ของสมการเชิงผลต่าง

กำหนดให้ S_t, Y_t, และ I_t คือเงินออม,รายได้, และการลงทุนในปีที่ t นับจากปัจจุบัน โดยมีความสัมพันธ์ดังสมการเชิงผลต่างต่อไปนี้

$$S_t = 2Y_t + 5$$

$$I_{t+1} = \frac{1}{2}(Y_{t+1} - Y_t)$$

$$S_{t+1} = 3I_{t+1}$$

$$Y_0 = \frac{5}{4}$$

จงหา S_t, Y_t และอัตราส่วนระหว่างรายได้กับเงินออมในระยะยาว

จาก $I_{t+1} = \frac{1}{2}(Y_{t+1} - Y_t)$ และ $S_{t+1} = 3I_{t+1}$ จะได้ $S_{t+1} = \frac{3}{2}(Y_{t+1} - Y_t)$

จาก $S_t = 2Y_t + 5$ จะได้ $S_{t+1} = 2Y_{t+1} + 5$

ดังนั้น $2Y_{t+1} + 5 = \frac{3}{2}(Y_{t+1} - Y_t)$ นั่นคือ $\boxed{Y_{t+1} = -3Y_t - 10}$

$$Y_{t+1} = C(-3)^t + c_0$$

โดยที่ $c_0 = -3c_0 - 10$ นั่นคือ $c_0 = -\frac{5}{2}$ จึงได้ $Y_t = C(-3)^{t-1} - \frac{5}{2}$

จาก $Y_0 = \frac{5}{4}$ จะได้ $C = -\frac{45}{4}$ ดังนั้น $\boxed{Y_t = -\frac{45}{4}(-3)^{t-1} - \frac{5}{2}}$

จาก $S_t = 2Y_t + 5$ จะได้ $\boxed{S_t = -\frac{45}{2}(-3)^{t-1}}$

อัตราส่วนระหว่างรายได้กับเงินออมในระยะยาวคือ $\lim_{t\to\infty} \frac{Y_t}{S_t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9(-3)^{t-1}}\right) = \frac{1}{2}$

Example

กำหนดให้สมการเชิงผลต่างของอุปสงค์และอุปทานในสินค้าชนิดหนึ่ง มีดังต่อไปนี้

อุปทาน : $q_{t+1} = 20 + p_t$

อุปสงค์ : $p_{t+1} = 40 - 0.5q_{t+1}$

โดยที่ q_t คือ ปริมาณสินค้าในปีที่ t นับจากปัจจุบัน

p_t คือ ราคาสินค้าต่อหน่วยในปีที่ t นับจากปัจจุบัน

จงหาดุลยภาพของผู้บริโภคในระยะยาว ($t \to \infty$)

Example

กำหนดให้ S_t, C_t, และ Y_t คือเงินออม, การบริโภค และรายได้ของประเทศในปีที่ t นับจากปัจจุบัน โดยมีความสัมพันธ์ดังสมการเชิงผลต่างต่อไปนี้

$$C_t + S_t = Y_t$$

$$Y_{t+1} = \frac{1}{2}S_t$$

$$C_t = \frac{1}{2}Y_t$$

$$Y_0 = \beta, \quad \beta > 0$$

จงหา S_t, C_t และ Y_t พร้อมทั้งสรุปผลแนวโน้มภาวะเงินออม การบริโภค และรายได้ของประเทศในระยะยาว