2301116
Calculus for Business II

บทที่ 7
อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปร

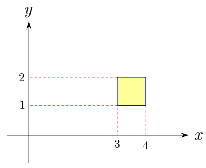
Dr.Paisan Nakmahachalasint
Paisan.N@chula.ac.th

อินทิกรัลของฟังก์ชันของสองตัวแปร

อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปรเป็นการอินทิเกรตบนช่วง

อินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชันของสองตัวแปรเป็นการอินทิเกรต
บนอาณาบริเวณในระนาบ

$$\int_1^2\int_3^4 xy\,dx\,dy = \int_1^2\left[\int_3^4 xy\,dx\right]dy$$



การหาค่าของอินทิกรัลสองชั้น

$$\int_1^2\int_3^4 xy\,dx\,dy = \int_1^2\left[\int_3^4 xy\,dx\right]dy = \int_1^2\left[\frac{x^2y}{2}\bigg|_{x=3}^{x=4}\right]dy$$

$$= \int_1^2\left[\frac{16y}{2}-\frac{9y}{2}\right]dy = \int_1^2\frac{7y}{2}\,dy$$

$$= \frac{7y^2}{4}\bigg|_1^2 = \frac{7}{4}\left(2^2-1^2\right) = \frac{21}{4}$$

$$\int_1^2\int_3^4 xy\,dx\,dy = \frac{21}{4}$$

Example

$$\int_0^{\ln 2}\int_{-1}^0 2xe^y\,dx\,dy = \int_0^{\ln 2}\left[\int_{-1}^0 2xe^y\,dx\right]dy = \int_0^{\ln 2}\left[x^2e^y\Big|_{x=-1}^{x=0}\right]dy$$

$$= \int_0^{\ln 2}\left[0-e^y\right]dy = -\int_0^{\ln 2}e^y\,dy$$

$$= -e^y\Big|_0^{\ln 2} = \left(-e^{\ln 2}\right)-\left(-e^0\right) = -1$$

$$\int_0^{\ln 2}\int_{-1}^0 2xe^y\,dx\,dy = -1$$

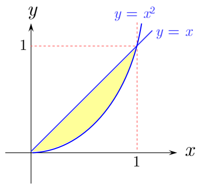
Exercise

จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

1. $\int_{-1}^{2}\int_{1}^{3}\frac{y^2}{x}\,dx\,dy$
2. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(x+y)\,dx\,dy$
3. $\int_{0}^{2}\int_{1}^{2}ye^{xy}\,dx\,dy$
4. $\int_{0}^{2}\int_{1}^{4}2e^{x}\sqrt{y}\;dy\,dx$
5. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\frac{xy^2}{(x^2+1)(y^3+1)}\,dy\,dx$

อินทิกรัลซ้อนบนโดเมนทั่วไป

$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\left[\frac{xy^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{y=x}\right]dx$$



$0\le x\le 1$

$x^2\le y\le x$

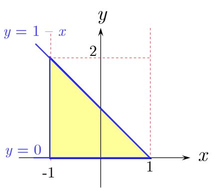
$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[x^3-x^5\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}$$

$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx = \frac{1}{24}$$

Example

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x}(2x+1)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[(2x+1)y\Big|_{y=0}^{y=(1-x)}\right]dx$$



$-1\le x\le 1$

$0\le y\le 1-x$

$$= \int_{-1}^{1}(2x+1)(1-x)\,dx$$

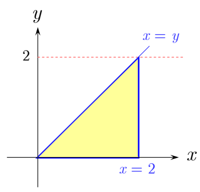
$$= \int_{-1}^{1}(-2x^2+x+1)\,dx$$

$$= \left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{2}{3}$$

Example

$$\int_{0}^{2}\int_{y}^{2}dx\,dy = \int_{0}^{2}\left[x\Big|_{x=y}^{x=2}\right]dx$$



$0\le y\le 2$

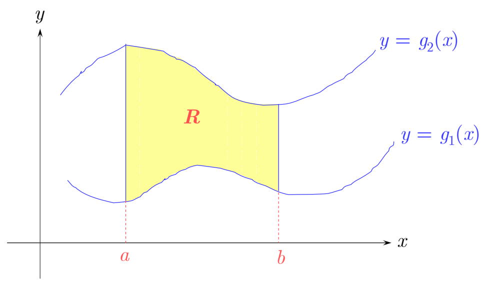
$y\le x\le 2$

$$= \int_{0}^{2}(2-y)\,dx$$

$$= \left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$= \left(4-\frac{2^2}{2}\right)=2$$

บริเวณที่เขียนได้ในรูปของส่วนตัดขวางแนวดิ่ง

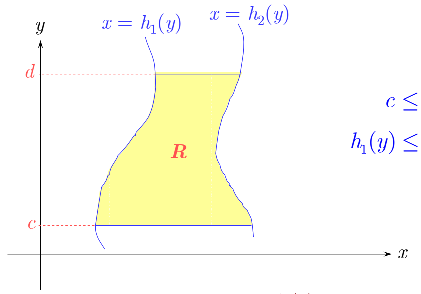


$a \le x \le b$

$g_1(x) \le y \le g_2(x)$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

บริเวณที่เขียนได้ในรูปของส่วนตัดขวางแนวนอน



$c \le y \le d$

$h_1(y) \le x \le h_2(y)$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

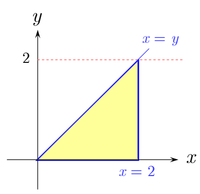
Exercise

จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

1. $\int_1^2 \int_y^{y^2} dx\,dy$
2. $\int_{10}^1 \int_0^{1/y} ye^{xy}\,dx\,dy$
3. $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$
4. $\int_0^1 \int_0^x (3-x-y)\,dy\,dx$
5. $\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,dx\,dy$
6. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,dy\,dx$

การเปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต



$0 \le y \le 2$, $y \le x \le 2$ $\Rightarrow$ $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$

$$\int_0^2 \int_y^2 dx\,dy = \int_0^2 \int_0^x dy\,dx = \int_0^2 \left[y \Big|_{y=0}^{y=x} \right] dy = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - 0 = 2$$

Example

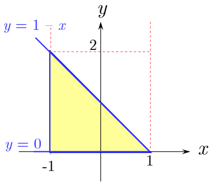
$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x}(2x+1)\,dy\,dx = \int_{0}^{2}\int_{-1}^{1-y}(2x+1)\,dx\,dy$$

$$= \int_{0}^{2}(x^2+x)\Big|_{x=-1}^{x=1-y}\,dy$$

$$= \int_{0}^{2}\left[(1-y)^2+(1-y)\right]dx$$

$$= \int_{0}^{2}\left[y^2-3y+2\right]dx$$

$$= \left(\frac{y^3}{3}-\frac{3y^2}{2}+2y\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{2}{3}$$



$-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$ ⇨ $0 \le y \le 2$, $-1 \le x \le 1-y$

Example

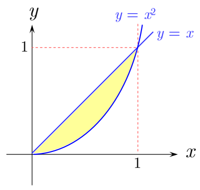
$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} xy\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy$$

$$= \int_{0}^{1}\left[\frac{x^2y}{2}\Bigg|_{x=y}^{x=\sqrt{y}}\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[y^2-y^3\right]dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$$



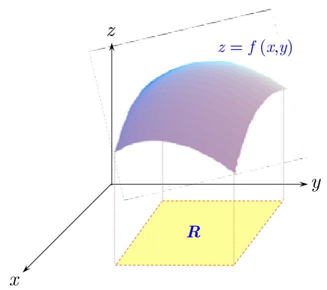
$0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le x$ ⇨ $0 \le y \le 1$, $y \le x \le \sqrt{y}$

Exercise

จงเขียนรูปแสดงบริเวณของการอินทิเกรต
และเขียนอินทิกรัลที่สมมูลกันโดยให้เปลี่ยนลำดับของการอินทิเกรต
จากนั้นจึงหาค่าของอินทิกรัลทั้งสอง

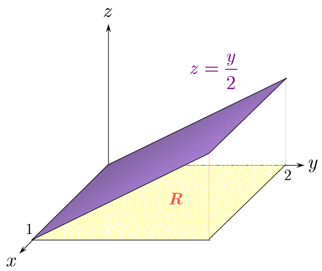
1. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2x} dy\,dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{2}^{4-2x} xy\,dy\,dx$
3. $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} (x+y)\,dx\,dy$
4. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^x} y\,dy\,dx$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x+1}^{2x+2} x\,dy\,dx$
6. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{4-x^2} x\,dy\,dx$

การหาปริมาตรจากอินทิกรัลสองชั้น



$$\text{Volume} = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Example



$$\text{Volume} = \int_0^2 \int_0^1 \frac{y}{2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{yx}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2}\,dy$$

$$= \frac{y^2}{4}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{4} = 1$$

Exercise

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่มีฐานเป็นบริเวณในระนาบ xy ที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = 4 - x^2$ และเส้นตรง $y = 3x$ และด้านบนของรูปทรงตันปิดล้อมด้วยระนาบ $z = x + 4$

2. จงหาปริมาตรในอัฐมภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วยระนาบพิกัดทั้งสามทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $z = y$

3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากผิว $z = 4 - x^2 - y$ ตัดกับอัฐมภาคที่หนึ่ง